16/4/19

→ (X,ρ) $\mathrm{int}(\{x\})$. Αν $x \in X$ ώστε $\{x\}^\circ = \emptyset$ τότε το x είναι σημείο συσσώρευσης του X.

Αποδ: Εφόσον $\{x\}^\circ = \emptyset$ έχουμε: $X \setminus \{x\}^\circ = X$

$\overline{X \setminus \{x\}} = X \Rightarrow x \in \overline{X \setminus \{x\}} \Rightarrow x \in X'$ δηλαδή το x είναι σ.σ. του X.

β) $A \subseteq X$ και $x \in A'$. Τότε υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο A με $x_i \neq x_j$ για $i\neq j$ ώστε: $x_n \to x$

Αποδ: Θα κατασκευάσουμε επαγωγικά μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε $x_n \neq x$ $\forall n$, $\rho(x_n, x) < \frac{1}{n}$ και

$x_n \notin \{x_1, \ldots, x_n\}$

1ο βήμα: $x \in A'$, $B_\rho(x,1) \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$
Επιλέγουμε: $x_1 \in B_\rho(x,1) \cap A \setminus \{x\}$ τότε: $\rho(x_1, x) < 1$ και $x_1 \neq x$

Γενικό επαγωγικό βήμα: Υποθέτουμε ότι έχουν επιλεγεί οι $x_1, \dots, x_n$

Θέτουμε $\varepsilon = \min\left(\{B_\rho(x_i, x) \;\; i = 1, \dots, n\} \cup \left\{\frac{1}{n+1}\right\}\right) > 0$

Επιλέγουμε $x_{n+1} \in B_\rho(x, \varepsilon) \cap A \setminus \{x\}$, τότε $x_{n+1} \neq x$
$\rho(x_{n+1}, x) < \frac{1}{n+1}$ και $x_{n+1} \notin \{x_1, \dots, x_n\}$

Τότε η ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ έχει διαφορετικούς ανά δύο όρους και εφόσον $\rho(x_n, x) < \frac{1}{n}$ $\forall n$

έχουμε: $\rho(x_n, x) \to 0$ άρα $x_n \xrightarrow{\rho} x$

Παράδειγμα: Στο σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ θεωρούμε τη μετρική: $d(m, n) = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|$

$f: A \to \mathbb{R}$
$d(x,y) = |f(x) - f(y)|$

Η d είναι μετρική στο $\mathbb{N}$. Η d είναι ισοδύναμη της συνήθους μετρικής ρ στο $\mathbb{N}$. Ο $(\mathbb{N}, \rho)$ είναι πλήρης μ.χ. Ο $(\mathbb{N}, d)$ δεν είναι πλήρης.

Η ακολουθία $x_n = n$ είναι βασική ακολουθία στο $(\mathbb{N}, d)$ διότι για κάθε $\varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}: \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n \geq n_0$

οπότε για $n, m \geq n_0$ $d(m,n) = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

(όμως η ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δεν είναι συγκλίνουσα. Εφόσον οι ρ, d είναι ισοδύναμες αν $x_n \xrightarrow{d} x$ για ~~κάποιο~~ κάποιο $x \in \mathbb{N}$ τότε $x_n \xrightarrow{\rho} x$ άτοπο)

Εξήγηση γιατί οι ρ, d είναι ισοδύναμες:

Στον $(\mathbb{N}, \rho)$ κάθε μονοσύνολο είναι ανοικτό άρα κάθε υποσύνολο του $\mathbb{N}$ είναι ανοικτό

$$\{n\} = \mathbb{N} \cap (n-1, n+1)$$

Στον $(\mathbb{N}, d)$ κάθε μονοσύνολο είναι επίσης ανοικτό διότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$:

$B_d\left(n, \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \{n\}$ άρα κάθε υποσύνολο του $\mathbb{N}$ είναι ανοικτό.

Επομένως $I : (\mathbb{N}, d) \to (\mathbb{N}, \rho)$ είναι ομοιομορφισμός (1-1, επί σύνολο, ως αντίστροφη συνεχή) και άρα οι ρ, d είναι ισοδύναμες

Συμπαγείς μετρικοί χώροι

Ορισμός Αν X είναι ένα σύνολο $A \subseteq X$ και $(G_i)_{i \in I}$ μια οικογένεια από υποσύνολα του X η $(G_i)_{i \in I}$ λέγεται κάλυμμα (ή κάλυψη) του A αν $A \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i$

→ Αν $J \subseteq I$ και ισχύει: $A \subseteq \bigcup_{i \in J} G_i$ λέμε ότι το $(G_i)_{i \in J}$ είναι ~~[illegible]~~ υποκάλυμμα του $(G_i)_{i \in I}$ (για το A)

→ Αν (X,ρ) είναι μετρικός χώρος $A \subseteq X$ και η $(G_i)_{i\in I}$ είναι οικογένεια ανοιχτών συνόλων με $A \subseteq \bigcup_{i\in I} G_i$ η $(G_i)_{i\in I}$ λέγεται ανοιχτό κάλυμμα του A.

Ορισμός: Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $K \subseteq X$. Το K λέγεται συμπαγές αν κάθε ανοιχτό κάλυμμα του K έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα, δηλ. αν για κάθε οικογένεια ανοιχτών συνόλων $(G_i)_{i\in I}$ με $K \subseteq \bigcup_{i\in I} G_i$ υπάρχει $J \subseteq I$ με J πεπερασμένο ώστε $K \subseteq \bigcup G_i$. (Η με άλλα λόγια $\exists n\in\mathbb{N}, \exists i_1, \dots, i_n \in I$ ώστε $K \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} G_{i_k}$)

Ειδικότερα για $K = X$ και X: συμπαγές ώστε ο μετρικός χώρος X καλείται συμπαγής.

Παρατήρηση: Αν (X,ρ) μετρικός χώρος και $K \subseteq X$ τότε το K είναι συμπαγές αν και μόνο αν ο μετρικός χώρος (K,ρ_K) [όπου ρ_K η ανοιχτή μετρική στο K] είναι συμπαγής.

Αποδ: Άσκηση

Παραδείγματα: 1) κάθε πεπερασμένο υποσύνολο ενός μ.χ. είναι συμπαγές

Αποδ: Αν $\{x_1, \dots, x_n\}$ ένα πεπ. σύνολο και $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i$ όπου G_i ανοικτό. Για κάθε

$k = 1, \dots, n$ $\exists\, i_k \in I$ ώστε $x_k \in G_{i_k}$ είναι πεπερασμένο τότε το $(G_{i_k})_{k=1}^{n}$ είναι πεπερασμένο υποκάλυμμα του $(G_i)_{i \in I}$ για το $\{x_1, \dots, x_n\}$

2) Αν (X, ρ) μ.χ. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και $x \in X$ ώστε $x_n \xrightarrow{\rho} x$ τότε το σύνολο $K = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ είναι συμπαγές

Αποδ: Έστω $(G_i)_{i \in I}$ οικογένεια ανοικτών συνόλων ώστε $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\} \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i$ τότε υπάρχει $i_0 \in I$ ώστε $x \in G_{i_0}$. Εφόσον το G_{i_0} είναι ανοικτό υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B_\rho(x, \varepsilon) \subseteq G_{i_0}$. Εφόσον $x_n \xrightarrow{\rho} x$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\rho(x_n, x) < \varepsilon$ για κάθε $n > n_0$ δηλ. $x_n \in B_\rho(x, \varepsilon)$ για κάθε $n > n_0$

Για κάθε $k = 1, 2, \dots, n_0$ επιλέγουμε $i_k \in I$ ώστε $x_k \in G_{i_k}$. Έτσι $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\} \subseteq \bigcup_{k=0}^{n_0} G_{i_k}$

Επομένως το K είναι συμπαγές.

3) Ο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική δεν είναι συμπαγής μετρικός χώρος. Για παράδειγμα $\mathbb{R} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-n, n)$

και το $((-n, n))_{n \in \mathbb{N}}$ δεν έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα για το $\mathbb{R}$.

4) Το σύνολο $(0,1)$ δεν είναι συμπαγές

(π.χ.) $\left(\left(\frac{1}{n}, 1\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του $(0,1)$ που δεν έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα

Παρακάτω θα δείξουμε ότι το $[0,1]$ είναι συμπαγές (γενικότερα το $[a,b]$ για $a, b \in \mathbb{R}$ τότε $a \le b$)

5) Έστω (X,ρ) ένας μ.χ. όπου ρ η διακριτή μετρική στο X. Ένα $K \subseteq X$ είναι συμπαγές αν και μόνο αν το K είναι πεπερασμένο

α) Αν K πεπερασμένο τότε η συμπαγές (ισχύει γενικά)

β) Αν το K είναι άπειρο τότε το $(\{x\})_{x \in K}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του K, (στο διακριτό μ.χ όλα τα υποσύνολα είναι ανοικτά) δεν έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα.

Θεώρημα: Αν $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ το κλειστό διάστημα $[a,b]$ είναι συμπαγές

Αποδ: Έστω $(G_i)_{i \in I}$ οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ ώστε $[a,b] \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i$

Θέτουμε $A = \{ t \in [a,b] : \exists J \subseteq I$ με J πεπερασμένο ώστε $[a,t] \subseteq \bigcup_{i \in J} G_i \}$

Σημείωση: Η απόδειξη θα ολοκληρωθεί αν δείξουμε ότι $b \in A$

1) $a \in A$ (Πράγματι υπάρχει $i_0 \in I$ ώστε $a \in G_{i_0}$ άρα για $J = \{i_0\}$ έχουμε το συμπέρασμα)

2) Το A περιέχει και άλλα στοιχεία εκτός του a. (Πράγματι, αν $i_0 \in I$ ώστε: $a \in G_{i_0}$ εφόσον το G_{i_0} είναι ανοικτό υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε: $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subseteq G_{i_0}$. Τότε για κάθε t με $a < t < a+\varepsilon$ έχουμε $[a,t] \subseteq G_{i_0}$

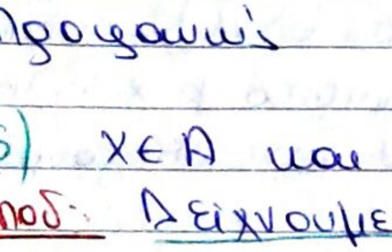
3) Το A είναι προφανώς άνω φραγμένο (το b είναι άνω φράγμα του A)

4) Εφόσον το A είναι μη κενό και άνω φραγμένο έχει supremum. Θέτουμε $x = \sup A$ και προφανώς $a \leq x \leq b$

5) $x \in A$ και $x = b$

<u>Αποδ:</u> Δείχνουμε πρώτα ότι $x \in A$. Εφόσον $x \in [a,b]$ υπάρχει $j_0 \in I$ ώστε $x \in G_{j_0}$ και εφόσον το G_{j_0} είναι ανοικτό $\exists\, \delta > 0$ ώστε $(x-\delta, x+\delta) \subseteq G_{j_0}$. Εφόσον $\sup A = x$ υπάρχει $t \in A$ με $x - \delta < t$

Εφόσον $t \in A$ $\exists\, J \subseteq I$ J: πεπερασμένο ώστε: $[a,t] \subseteq \bigcup_{i \in J} G_i$ και εφόσον $[t,x] \subseteq (x-\delta, x+\delta) \subseteq G_{j_0}$ προκύπτει: $[a,x] \subseteq \bigcup_{i \in J \cup \{j_0\}} G_i$



Εφόσον το $J \cup \{j_0\}$ είναι πεπερασμένο συμπεραίνουμε ότι $x \in A$

Δείχνουμε τώρα ότι $x = b$: Υποθέτουμε προς απαγωγή σε άτοπο ότι $x < b$

Εφόσον $(x-\delta, x+\delta) \subseteq G_{j_0}$, επιλέγοντας s με $x < s < \min\{a, b\}$ έχουμε ότι $[x, s] \subseteq G_{j_0}$ και εφόσον $x \in A$ υπάρχει $J \subseteq I$, $[a, x] \subseteq \bigcup_{i \in J} G_i$ και έτσι:

$[a, s] \subseteq \bigcup_{i \in J \cup \{j_0\}} G_i$ Συνεπώς $s \in A$ άτοπο εφόσον $s > x = \sup A$.

Επομένως $x = b$ και άρα $b \in A$

Παρατήρηση: Η παραπάνω απόδειξη στηρίχτηκε στον ορισμό της συμπάγειας. Παρακάτω αφού αποδείξουμε το χαρακτηρισμό της συμπάγειας με ακολουθίες θα προκύψει μια άλλη πιο εύκολη απόδειξη.